الجبر الخطي والهندسة التحليلية

المستوى الثاني تقانة

المحاضرة الثانية

- **٣-١ العمليات الجبرية للمصفوفات: Matrices Algebra**
- **٣-١-١ جمع و طرح المصفوفات: Matrices addition and subtraction**
- **يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح للمصفوفات التي لها نفس الرتبة أي لها نفس العدد من الصفوف ونفس العدد من الأعمدة. فإذا كانت A , B مصفوفتان من نفس الرتبة فإن مجموع هاتين المصفوفتين يعرف بأنه يساوى المصفوفة C التي لها نفس الرتبة وكل عنصر من عناصرها يساوى مجموع العنصرين المتناظرين في A , B.**

- مثال (٣-١): إذا كانت:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+3 & -2+6 & 1+5 \\ 3+2 & 0+2 & 5-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- وكل مصفوفتان لهما نفس الرتبة قابلتان للجمع والطرح ويعرف طرح المصفوفتين بنفس الطريقة إذ أن الفرق بين المصفوفتين A , B من نفس الرتبة هو المصفوفة D من نفس الرتبة أيضاً، وكل عنصر من عناصرها يساوى عنصر المصفوفة A مطروحاً منه العنصر المقابل في المصفوفة B ، فمثلاً في المثال السابق:

$$D=A-B=\begin{pmatrix} 1-3 & -2-6 & 1-5 \\ 3-2 & 0-2 & 5+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & -4 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- ومن التعريف يمكن إثبات أن مجموع المصفوفات له الخصائص التالية:
-
-

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

- وإذا كانت المصفوفة B هي حاصل جمع عدد من m من المصفوفات A فإن B = mA وكل عنصر من عناصر المصفوفة B يساوى m مضروبة في العنصر المقابل في المصفوفة A.

- مثال

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

- ومن هذا المثال يتضح الآتي:
- ١- تتساوى المصفوفتان A , B إذا تساوت رتبتاهما وتكون جميع عناصر كل منهما المتناظرة متساوية.
- ٢- حاصل ضرب مصفوفة A في عدد m حقيقي أو تخيلي (مقدار قياسي أو مقدار ثابت) هو مصفوفة B عناصرها عبارة عن حاصل ضرب كل عنصر من عناصر A فى m. فمثلاً إذا كانت:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore mA=\begin{pmatrix} m & 3m & 2m \\ 2m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

- وجدير بالملاحظة أن ضرب المصفوفة في عدد يخضع لقانون التوزيع وقانون التبادل في علم الجبر ويكون: $m\,(A \pm B) = mA \pm mB$
- وكذلك: $mA = Am$
-
- بشرط أن تكون m عدد وليست مصفوفة أخرى مثلاً.
- وهذا ما يسمى بالضرب في قياسي Scalar Multiplication.
-

- **مدور المصفوفة أو المصفوفة البديلة: The transposed matrix**
- **إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة فى مصفوفة $A_{(m \times n)}$ فإن المصفوفة الجديدة تسمى مدور المصفوفة أو المصفوفة البديلة ويرمز لها بالرمز $A_{(n \times m)}$ أو A_T أو $A^{/}$ ، فإذا كانت مصفوفة رتبتها (2 x 3) تكون كالآتي:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

- وتكون المصفوفة البديلة لهذه المصفوفة ويرمز لها بالرمز A_T كالتالي:

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

- ومن الواضح أن المصفوفة البديلة لمصفوفة العمود [A] هي مصفوفة الصف (A) فمثلاً إذا كانت:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \therefore [A]_T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = (A)$$

- ويتضح بوجه عام أنه إذا كانت A مصفوفة رتبتها (m x n) فإن رتبة المصفوفة A_T هى (n x m) لذلك تقبل كل منهما الضرب مع الأخرى أى يمكن إيجاد حاصل ضرب $A\,A_T$, $A_T\,A$ وتختلف رتبة حاصل الضرب A A_T عن رتبة حاصل الضرب $A_T\,A$ إلا إذا كانت A مصفوفة مربعة.
- ويمكن إثبات أن المصفوفة البديلة لها الخصائص الآتية:

$$(1)\ (A)_T = A \qquad (2)\ (A+B)_T = A_T + B_T$$

$$(3)\ (nA)_T = n.A_T \qquad (4)\ (AB)_T = B_T.A_T$$

$$(5)\ (ABC)_T = C_T.B_T.A_T$$

- **ضرب المصفوفات:**
- **إذا كانت هناك مصفوفتان A, B فإنهما تكونان قابلتين للضرب إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة اليسرى A مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة اليمنى B . فعلى سبيل المثال، المصفوفتين A , B رتبتاهما (3 x 2) , (2 x2) على الترتيب وتتكون من:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

- حاصل الضرب $C = AB$ هو مصفوفة رتبتها (3×2) تعرف كالآتي:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

- أي أن المصفوفة الناتجة لها عدد من الصفوف يساوى عدد صفوف المصفوفة الأولى A وعدد من الأعمدة يساوى عدد أعمدة المصفوفة الثانية B ويكون كل عنصر من عناصر المصفوفة C وليكن C_{ik}(أى الواقع في الصف رقم I والعمود رقم k) مساوياً لمجموع حواصل ضرب عناصر الصف رقم I في المصفوفة اليسرى A في عناصر العمود رقم k من المصفوفة اليمنى B فى نظيره.

- مثال (٣-٣): إوجد حاصل ضرب المصفوفتين:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

- وضرب المصفوفات له الخصائص التالية:
- $$(1)\ A(B+C)=AB+AC$$
- $$(2)\ (A+B)C=AC+BC$$
- $$(3)\ A(BC)=AB(C)$$
- وعموماً يمكن إثبات أن: $AB \neq BA\ ,\ ABC \neq BAC$
- وإذا كانت $AB = AC$ فهذا لا يعنى أن $B = C$. وإذا كانت $AB = o$ فلا يعنى هذا أن $B = o$ أو $A = o$